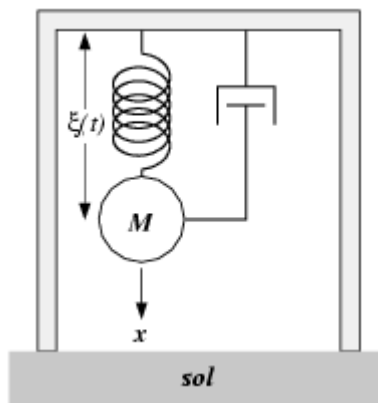


EQUATIONS DU SISMOMETRE

Matthieu Sylvander, OMP, Toulouse

I Le pendule vertical

Le pendule vertical consiste en une masse M attaché à un bâti, solidaire du sol via un système de ressort et piston. On supposera ses mouvements limités à la direction x , et on notera $u(t)$ le mouvement du sol dans un repère inertiel, et $\xi(t)$ le mouvement de la masse par rapport au bâti et donc au sol.



Le ressort de raideur k exercera sur la masse une force $k[\xi(t) - \xi_0]$ proportionnelle à son étirement.

Le piston exercera sur la masse une force $D \dot{\xi}(t)$ proportionnelle à la vitesse relative entre la masse et le sol.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$M \frac{d^2}{dt^2}[\xi(t) + u(t)] + D \frac{d\xi(t)}{dt} + k[\xi(t) - \xi_0] = 0 \quad (1)$$

Si l'on réécrit $x(t)$ le déplacement $\xi(t) - \xi_0$ de la masse par rapport à sa position d'équilibre ξ_0 , (1) devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\varepsilon \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -\ddot{u}(t) \quad (2)$$

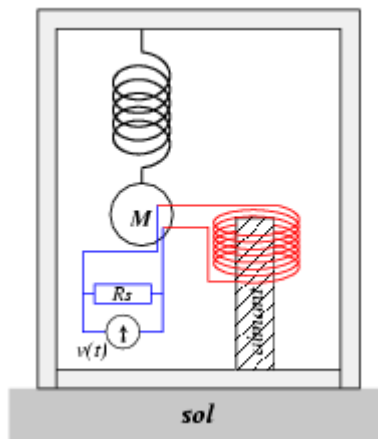
avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ = pulsation propre du pendule et $2\varepsilon = \frac{D}{M}$

On introduit $h = \varepsilon/\omega_0$ la **constante d'amortissement** du pendule ; h vaut la moitié de l'inverse du facteur de qualité de l'oscillateur amorti ($Q = \omega_0/2\varepsilon$).

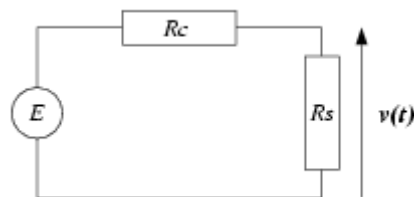
II Le capteur électromagnétique de vitesse

II- 1 Description

Le mouvement du pendule est mesuré en général grâce à un capteur électromagnétique de vitesse, constitué d'une bobine solidaire de la masse se déplaçant dans le champ magnétique d'un aimant solidaire du bâti. Il délivre par induction une tension proportionnelle à la vitesse de la bobine.



Le circuit équivalent est un générateur de tension E , de résistance interne R_c , et chargé (en général) par une résistance de shunt R_s .



| | | |
|--------|-----|---|
| Soient | E | la force électromotrice du générateur équivalent |
| | v | la tension mesurée aux bornes de la bobine (ou de la charge) |
| | G | la sensibilité du capteur, en $V/m \cdot s^{-1}$, appelée aussi constante électrodynamique de la bobine (pour mémoire $G = Blb$, B étant la valeur du champ magnétique et lb la longueur du fil de la bobine) |

on aura $E = G \dot{x}$ et $v = \frac{R_s}{R_c + R_s} E$

soit $v = \frac{R_s}{R_c + R_s} G \dot{x}$ (3)

II- 2 Amortissement

La bobine est parcourue par un courant I et donc soumise à une force F telle que (loi de Biot et Savart, ou Laplace) :

$$F = G I \quad \text{avec} \quad I = \frac{E}{R_c + R_s}$$

Le pendule est donc soumis à une force d'amortissement électrique s'opposant au mouvement de la masse, qui s'écrira

$$F = \frac{G^2}{R_c + R_s} \dot{x}$$

Si l'on compare avec l'équation (1) correspondant à un amortissement par piston, on obtient une atténuation électrique valant :

$$\varepsilon = \frac{G^2}{2M(R_c + R_s)}$$

Dans le cas général, si l'atténuation mécanique du pendule n'est pas nulle mais vaut ε_0 , on aura l'atténuation totale suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{G^2}{2M(R_c + R_s)}$$

Les constantes d'amortissement sont alors :

$$h_e = \frac{G^2}{2M(R_c + R_s)\omega_0} \quad \text{constante d'amortissement électrique}$$
$$h_0 \quad \text{constante d'amortissement intrinsèque, mécanique (ou en circuit ouvert)}$$

et l'amortissement total vaut $h = h_e + h_0$.

III- 3 Résolution des équations : calcul de la sensibilité du sismomètre

On supposera que le déplacement du sol dans le repère inertiel est de la forme très générale $u(t) = A e^{j\omega t}$ (décomposition en séries de Fourier : le déplacement peut être considéré comme une superposition d'harmoniques). L'équation (2) s'écrira alors:

$$\ddot{x}(t) + 2\varepsilon \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega^2 A_i e^{j\omega t}$$

Si l'on propose une solution de la forme $x(t) = B e^{j\omega t}$, l'équation précédente devient :

$$-\omega^2 B + 2\varepsilon j\omega B + \omega_0^2 B = \omega^2 A$$

d'où la fonction de réponse en fréquence du sismomètre :

$$T(j\omega) = \frac{B}{A} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\varepsilon\omega} \quad (4)$$

Si l'on s'intéresse au capteur électromagnétique de vitesse, on réécrira la relation précédente de façon à faire apparaître la tension aux bornes de la bobine $v(t)$ en fonction de la vitesse du sol $\dot{u}(t)$:

$$(3) \Rightarrow v(t) = \frac{Rs}{Rc + Rs} G \dot{x} = \frac{Rs}{Rc + Rs} G j\omega B e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \dot{u}(t) = j\omega A e^{j\omega t}$$

Si l'on injecte $v(t)$ et $\dot{u}(t)$ dans (4) en ne s'intéressant qu'au module, on obtient :

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{v}{\dot{u}} \right| = G \frac{Rs}{Rc + Rs} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}} = G \frac{Rs}{Rc + Rs} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2}}$$

et enfin si l'on veut séparer amortissement intrinsèque et amortissement électrique réglable :

$$|T(j\omega)| = G \frac{Rs}{Rc + Rs} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_0^2\omega^2 \left[h_0 + \frac{G^2}{2(Rc + Rs)M\omega_0} \right]^2}} \quad (5)$$

L'équation ci-dessus donne la sensibilité du sismomètre à la fréquence $f = \omega/2\pi$ en fonction de ses caractéristiques mécaniques et électriques intrinsèques, et de la résistance de charge réglable.

Application numérique : sensibilité des stations du RSSP.

SENSIBILITE DES STATIONS DU RSSP

(Réseau de Surveillance Sismique des Pyrénées)

La sensibilité de la chaîne d'acquisition est la combinaison des sensibilités des différents organes : capteur et numériseur. Elle s'exprime en points (unités numériques des fichiers de données produits par le numériseurs) par $m.s^{-1}$. Elle permet de remonter à la vitesse de déplacement du sol.

La sensibilité est valable pour une fréquence particulière : en effet, si la réponse en fréquence du numériseur est plate (pour les fréquences usuelles), ce n'est pas le cas pour le capteur. Pour un capteur courte-période comme le L4C- 1Hz, on s'intéresse à la sensibilité à haute fréquence, c'est-à-dire à la partie plate de la courbe de réponse.

APPAREILS :

- Capteurs RSSP : Mark Products L4C- 1Hz
- Numériseurs RSSP : Agecodagis Minititan 3, convertisseurs A/D Analog Device AD_7710 ou Harris HI7190

Capteur Mark Products L4C- 1Hz (valeurs nominales constructeur) :

$$R_c = 5500 \Omega, G = 276 V/m.s^{-1}, f_0 = 1 \text{ Hz}$$
$$h_0 = 0.28, M = 1 \text{ kg}$$

Numériseur Minititan 3 :

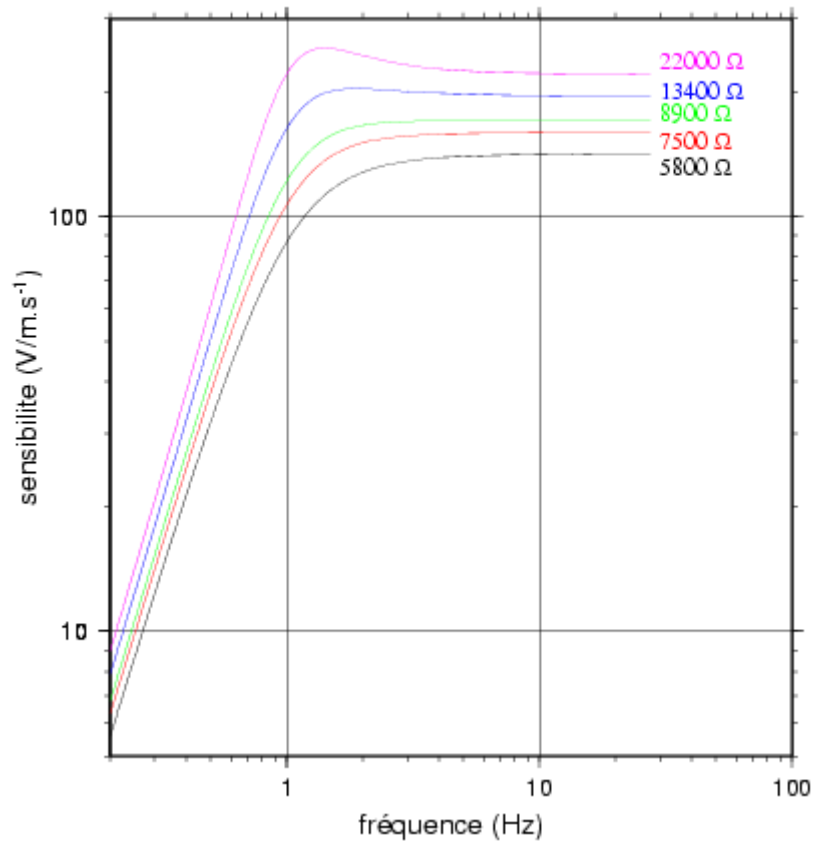
- AD_7710 avec gain de 16 (la plupart des stations RSSP) :
sensibilité $\approx 1.90 \cdot 10^{-8} V/pt$ (valeur moyenne)
- HI7190 avec gain de 1 (qqq RSSP) :
sensibilité $\approx 3.85 \cdot 10^{-8} V/pt$

Impédance d'entrée des numériseurs Minititan 3 : nulle pour les modèles avec convertisseur AD_7710, $Z = 25000 \Omega$ pour les modèles avec convertisseur HI7190.

SISMOMETRE L4C- 1HZ

On fait varier la résistance de shunt, et on représente la sensibilité en fonction de la fréquence. Les paramètres les plus intéressants sont la sensibilité à haute fréquence ($> 1 \text{ Hz}$) et l'allure de la courbe aux environs de la fréquence propre.

Réponse du L4C-1Hz suivant la résistance de charge



Pour $R_s < 8900 \Omega$, le sismomètre est sur- amorti

Pour $R_s > 8900 \Omega$, il est sous- amorti

Amortissement critique pour $R_s = 8900 \Omega$ ($h = 0.70$, sensibilité HF = 171 V/m.s^{-1})

La valeur adoptée pour les stations du RSSP ($R_s = 7500 \Omega$) donne un léger sous- amortissement.

Ce capteur a une réponse plate à partir de 2 Hz environ. Il est donc bien adapté à l'étude des petits séismes, dont le contenu fréquentiel est maximal vers 5- 10 Hz.

STATIONS DU RSSP

• Minititan AD_7710 + L4C- 1Hz

- impédance d'entrée nulle
- résistance de shunt = 7500Ω

$$\Rightarrow \text{amortissement total} = h_0 + h_e = 0.28 + 0.466 = 0.746$$

$$\Rightarrow \text{sensibilité à haute fréquence} = 159 \text{ V/m.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{sensibilité de la chaîne d'acquisition} = \text{sismo/numériseur}$$

$$S = 8.4 \cdot 10^9 \text{ pts / m.s}^{-1}$$

- **Minitan HI7190 + L4C- 1Hz**

- impédance d'entrée 25000 Ω
- résistance de shunt = 7500 Ω
- résistance de shunt équiv. $R_{eq} = (R_s \times Z) / (R_s + Z) = 5770 \Omega$

=> amortissement total = $h_0 + h_e = 0.28 + 0.538 = 0.818$

=> sensibilité à haute fréquence = 141 V/m.s⁻¹

=> sensibilité de la chaîne d'acquisition = sismo/numériseur

$$S = 3.7 \cdot 10^9 \text{ pts / m.s}^{-1}$$